Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-1 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Logika, Himpunan, Induksi Matematika
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili
Senin, 15 September 2014
Waktu: 50 menit

---

1. Periksalah kesahihan (validitas) argumen di bawah ini dengan bantuan tabel kebenaran: "Anda tidak boleh mengendarai mobil jika anda berusia di bawah 17 tahun. Jika anda boleh mengendarai mobil tentu anda sudah lulus SMA. Tetapi, anda belum berusia 17 tahun, oleh karena itu anda belum lulus SMA".

   Penyelesaian:
   Mialkan, p ≡ Anda boleh mengendari mobil
   q ≡ Anda berusia di bawah 17 tahun
   r ≡ Anda sudah lulus SMA

   Proposisi pertama: Anda tidak boleh mengendarai mobil jika anda berusia di bawah 17 tahun ➔ $q \to \sim p$
   Jika anda boleh mengendarai mobil tentu anda sudah lulus SMA ➔ $p \to r$
   Anda belum berusia 17 tahun ➔ q
   Anda belum lulus SMA ➔ ~r

   Argumen:

   $q \to \sim p$
   $p \to r$
   q
   ____
   $\sim r$

   Tabel kebenaran:

p	q	r	~p	q → ~p	p → r	~r
T	T	T	F	F	T	F
T	T	F	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	T
F	**T**	T	T	**T**	**T**	**F**
F	**T**	F	T	**T**	**T**	**T**
F	F	T	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T	T

   Pada baris berwarna kuning, semua premis benar dan konkulusi benar
   Tetapi pada baris berwarna biru, meskipun semya premis benar tetapi konklusi salah
   Karena kedua konklusi tersebut bertentangan, maka argumen tersebut tidak sahih (tidak valid) alias palsu.

2. Jika *A* dan *B* adalah himpunan, buktikan bahwa $\overline{(A \cup B)} \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A}$ dengan menggunakan hukum-hukum himpunan. Jangan lupa menyebutkan hukum yang dipakai.

   Penyelesaian:

   $\overline{(A \cup B)} \cup (\overline{A} \cap B) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ (Hukum De Morgan)
   $= (\overline{A} \cup (\overline{A} \cap B)) \cap (\overline{B} \cup (\overline{A} \cap B))$ (Hukum Distributif)
   $= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup (\overline{A} \cap B))$ (Hukum Absorpsi)
   $= \overline{A} \cap ((\overline{B} \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B))$ (Hukum Distributif)

$= \overline{A} \cap ((\overline{B} \cup \overline{A}) \cap U)$ (Hukum Komplemen)
$= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$ (Hukum Identitas)
$= \overline{A}$ (Hukum Absorpsi)

3. Berapa banyak elemen dari himpunan-himpunan berikut?
   a) $P(\emptyset)$ b) $P(\{a,b,\{a,b\}\})$ c) $P(\{\emptyset,\{a,b,c\}\})$ d) $\{\emptyset,P(\{a,b\})\}$

   <u>Penyelesaian</u>:
   a) Banyaknya elemen dari $\emptyset$ adalah 0. Jadi banyaknya elemen P($\emptyset$) adalah $2^0 = 1$.
   b) Banyaknya elemen dari {a,b,{a,b}} adalah 3 yaitu a , b dan {a,b}. Jadi banyaknya elemen P({a,b,{a,b}}) adalah $2^3 = 8$.
   c) Banyaknya elemen dari {$\emptyset$,{a,b,c}} adalah 2 yaitu $\emptyset$ dan {a,b,c}. Jadi banyaknya elemen P({$\emptyset$,{a,b,c}}) adalah $2^2 = 4$.
   d) Banyaknya elemen dari {$\emptyset$,P({a,b})} adalah 1 + |P({a,b})| = $1 + 2^2 = 5$.

4. Ada sebuah tumpukan batu berisi n buah batu. Tumpukan ini akan dipecah menjadi n buah tumpukan yang masing-masing berisi 1 buah batu, dengan langkah sebagai berikut. Tiap langkah, pilih satu tumpukan yang berisi lebih dari satu buah batu, dan bagi tumpukan tersebut menjadi dua buah tumpukan. Langkah tersebut mendapatkan skor sejumlah hasil kali dari banyaknya batu di kedua tumpukan tersebut. Langkah ini akan terus dilakukan hingga terdapat n buah tumpukan. Buktikan dengann induksi kuat bahwa bagaimanapun caranya kita memecah tumpukan tersebut, total skor yang diperoleh adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.
   Contoh: Misalkan $n = 4$. Bagi tumpukan ini menjadi 2 tumpukan yang masing-masing berisi 2 batu, yang memberikan kita skor $2 \times 2 = 4$. Kemudian, kedua tumpukan tersebut dibagi menjadi tumpukan yang berisi 1 batu, memberikan skor $1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$. Total skor yang diperoleh adalah $4 + 2 = 6$.

   <u>Penyelesaian</u>:
   Misalkan untuk suatu $n \geq 1$, $P(k)$ benar untuk setiap $1 \leq k \leq n$. Akan dibuktikan bahwa $P(n+1)$ juga benar.
   Misalkan tumpukan yang berisi $n+1$ batu dipecah menjadi dua tumpukan, yang satu berisi r batu, yang satu lagi berisi $n+1-k$ batu. Maka, skor yang diperoleh pada langkah ini adalah $r \times (n+1-k)$. Tumpukan yang pertama, yang berisi r batu, akan memberikan total skor $\frac{r(r-1)}{2}$. Tumpukan yang kedua akan memberikan total skor $\frac{(n+1-k)(n-k)}{2}$. Maka, total skor keseluruhan adalah $r \times (n+1-k) + \frac{r(r-1)}{2} + \frac{(n+1-k)(n-k)}{2} = \cdots = \frac{(n+1)n}{2}$. Jadi, $P(n+1)$ terbukti benar.

   Maka, menurut prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

5. Jika *n* adalah bilangan ganjil positif maka buktikan bahwa $n^2 - 1$ habis dibagi 8.
   <u>Penyelesaian</u>:
   Misalkan $P(n)$ adalah asersi bahwa pernyataan $8|n^2 - 1$ benar.

   Basis induksi:
   $P(1)$ benar karena 8 habis membagi 0.

   Langkah induksi:
   Misalkan $P(n)$ benar untuk suatu n bilangan ganjil positif.
   $(n+2)^2 - 1 = n^2 + 4n + 4 - 1 = (n^2 - 1) + 4(n+1)$. Karena 8 habis membagi $n^2 - 1$ dan 8 juga habis membagi $4(n+1)$, (karena n ganjil), maka 8 juga habis membagi $(n+2)^2 - 1$, sehingga $P(n+2)$ juga benar.
   Maka, menurut prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk setiap bilangan ganjil positif n.